****
Bulletin de l'Institut Vercors　　Numéro préparatoire 1
décembre2006
****

セミナーノート　décembre2006

I. 非一様水底２次元流水面波・解析函数解の存在定理

鹿野忠良(Institut Vercors)

１．方程式。

(1.1) $$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0,\ (x,y)\in\Omega_\Gamma=\{(x,y):x\in R^1,\ b(x)<y<\Gamma(t,x),\ t>0\},$$

(1.2) $$\frac{\partial}{\partial n}\Phi=-b_x(x)\Phi_x+\Phi_y=0,\ y=b(x),$$

(1.3) $$\Phi_t+\frac{1}{2}(\Phi_x^2+\Phi_y^2)+gy=0,\ x\in R^1,\ y=\Gamma(t,x),$$

(1.4) $$\Gamma_t+\Gamma_x\Phi_x-\Phi_y=0,\ x\in R^1,\ y=\Gamma(t,x),$$

此処に　*y=b(x)*　は実解析的、これに以下の初期条件を課する：

(1.5) $$\Phi(0,x,y)=\Phi_0(x,y):\ harmonic,$$

(1.6) $$\Gamma(0,x)=\Gamma_0(x)>0,\ analytic.$$

名前を付けておく：

(1.7) $$\Omega_\Gamma=\{(x,y):x\in R^1,\ b(x)<y<\Gamma(t,x),\ t>0\}.$$

２．固定領域問題への変換：等角写像。

上の問題を、境界条件 (1.2)~(1.4) を満たす　*z*-平面に於ける正則函数 $F=F(t,z)=(\Phi+i\Psi)(x+iy)$　を求める問題に変換し、更に之を等角写像

(2.1) $$z=z(t,\zeta)=x(t,\zeta)+iy(t,\zeta)$$

によって　ζ –平面, $\zeta=\xi+i\eta$, の固定領域に於ける境界値問題に変換する：

すなわち、水がみたす領域 (1.7) が等角写像 (2.1) によって固定領域（時間と共に動く事がない）

$$\Omega_h = \{(\xi,\eta):\xi \in R^1,\ 0<\eta<h,\ t>0\} \tag{2.2}$$

に写される時、$F=\Phi+i\Psi$ の等角像：(2.2) 上の $\zeta=\xi+i\eta$ の正則函数 $f=\varphi+i\psi$、および写像函数 (2.1) を、方程式 (1.1)~(1.4) を満たすべく定める問題に再定式化する:

$$\begin{aligned} f(t,\zeta) &= F(t,z(t,\zeta)) = \\ &= (\varphi+i\psi)(t,\zeta) = (\varphi+i\psi)(t,\xi+i\eta) = \varphi(t,\xi,\eta)+i\psi(t,\xi,\eta). \end{aligned}$$

まずは、写像の等角性より、水面に於ける外法線微分が下の様に書かれる事を注意しておこう：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\Gamma_x\Phi_x + \Phi_y = \frac{\varphi_\eta}{x_\xi} \quad \text{on} \quad y=\Gamma(t,x) \quad \text{and} \quad \eta = h, \tag{2.3}$$

此処に

$$\varphi_\eta = \varphi_\eta(t,\xi,\eta)$$

は、ポテンシャル　Φ　の等角像 φ の、水面 $\eta=h$ に於けるに外法線方向微分である。

３．等角写像が満たす方程式。

（１）水面　$\eta=h$ に於ける方程式（境界条件）(1.3)~(1.4) は、等角像に対する以下の方程式に変換される：

(3.1) $$\mathrm{Re}(f_t - \frac{f_\zeta}{z_\zeta} z_t) = -\frac{1}{2}\left|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}\right|^2 - gy,$$

(3.2) $$\mathrm{Im}\frac{z_t}{z_\zeta} = -\mathrm{Im}\frac{f_\zeta}{\left|z_\zeta\right|^2} = -\frac{\psi_\xi}{\left|z_\zeta\right|^2} = -\frac{A_h\varphi_\xi}{\left|z_\zeta\right|^2},$$

此処に、正則函数の虚部の境界値が実部の境界値によって、次の積分作用素を用いて与えられる(例えば、L.C.Woods[])：

(3.3) $$\psi_\xi(\xi) = A_h\varphi_\xi(\xi) = \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_\xi(t,\tau,h))}{\sinh\frac{\pi}{2h}(\tau-\xi)}d\tau,$$

此処に

$$\psi_\xi(0) = \psi_\xi(t,\xi,0) = -\varphi_\eta(t,\xi,0) = -\varphi_\eta(0) = 0 \ .$$

此処の「変換」の計算は　Kano-Nishida[], 1979,pp.338-340　と全く同様である。

すなわち、Plemelj の公式によって、複素速度ポテンシャル　$F=\Phi+i\Psi$　の等角像　$f=\varphi+i\psi$　および　写像函数 (2.1) が満たす次の方程式が水面の等角像　$\eta=h$　上で成立：

(3.1)* $$(f_t - \frac{f_\zeta}{z_\zeta} z_t) = -(\frac{1}{2}\left|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}\right|^2 + gy) - iA_h(\frac{1}{2}\left|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}\right|^2 + gy),$$

(3.2)* $$\frac{z_t}{z_\zeta} = -B_h(\mathrm{Im}\frac{f_\zeta}{\left|z_\zeta\right|^2}) - i\,\mathrm{Im}\frac{f_\zeta}{\left|z_\zeta\right|^2} = -B_h(\frac{\psi_\xi}{\left|z_\zeta\right|^2}) - i\frac{\psi_\xi}{\left|z_\zeta\right|^2} = -B_h(\frac{A_h\varphi_\xi}{\left|z_\zeta\right|^2})) - i\frac{A_h\varphi_\xi}{\left|z_\zeta\right|^2}.$$

しかるに，Plemelj の公式によれば、

$$y_\xi = y_\xi(t,\xi,h) = A_h x_\xi(t,\xi,h) + D_h\beta_\xi(\xi),\ \beta(\xi) = y(t,\xi,0) = b(x(t,\xi,0).$$

此処に、

(#) $$D_h u(\xi) = \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}\frac{\pi}{2h}(\tau-\xi)u(\tau)d\tau.$$

これを上の (3.1)＊, (3.2)＊ に代入して「解き」、水面 $\eta=h$ に於ける以下の方程式を得る：

(3.1)**
$$\varphi_t = -gA_h x - gD_h\beta_\xi - \frac{1}{2}\left|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}\right|^2 + \frac{(A_h\varphi_\xi)^2}{|z_\zeta|^2} - \frac{1}{2}\varphi_\xi B_h\left(\frac{A_h\varphi_\xi}{|z_\zeta|^2}\right) =$$
$$= -gA_h x - gD_h\beta_\xi + \frac{1}{2}\frac{(A_h\varphi_\xi)^2 - (\varphi_\xi)^2}{|z_\zeta|^2} - \frac{1}{2}\varphi_\xi B_h\left(\frac{A_h\varphi_\xi}{|z_\zeta|^2}\right),$$

(3.2)**
$$x_t = -x_\xi B_h\left(\frac{A_h\varphi_\xi}{|z_\zeta|^2}\right) + \frac{(A_h x_\xi + D_h\beta_\xi)A_h\varphi_\xi}{|z_\zeta|^2}.$$

此処で、次の事に注意する：

$$|z_\zeta|^2 = (x_\xi(t,\xi,h))^2 + (A_h x_\xi(t,\xi,h) + D_h\beta_\xi(\xi))^2 .$$

次に，水底での境界条件 (1.2) は、等角像に対し以下の様に書かれる：

(3.4)
$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -b_x\Phi_x\big|_{y=b(x)} + \Phi_y\big|_{y=b(x)} = \frac{\varphi_\eta}{x_\xi}(t,\xi,0) = 0 .$$

□

（２）以下、上の方程式を $\eta<0$ に拡張して、$\eta=-h$ に於ける方程式を見る。まず、水底 $\eta=0$ に於いて次が成立：

(3.4)
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{Re}\left(f_t - \frac{f_\zeta}{z_\zeta}z_t\right)(0) = 0,$$

(3.5)
$$\mathrm{Im}\frac{z_t}{z_\zeta}(0) = 0.$$

実際、

(3.6)
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{Re}\left(f_t - \frac{f_\zeta}{z_\zeta}z_t\right) = \mathrm{Re}(iF_{tz}z_\zeta) = x_\xi\Phi_{ty} - y_\xi\Phi_{tx} = x_\xi\left(-\frac{y_\xi}{x_\xi}\Phi_{tx} + \Phi_{ty}\right)$$

であるから、これに

$$-\frac{y_\xi}{x_\xi}=-b_x(x) \quad \text{on} \quad \eta=0$$

を代入すれば (3.4) を得る。

更に、水底で次も成立：

$$\text{(3.7)} \qquad \operatorname{Im}\frac{z_t}{z_\zeta}(0)=(\operatorname{Im}\frac{z_t\bar{z}_\zeta}{|z_\zeta|^2})(0)=\frac{-x_t y_\xi+x_\xi y_t}{|z_\zeta|^2}(0)=0\ .$$

以上より、鏡像原理によって、まず

$$\text{(3.8)} \qquad \operatorname{Re}(f_t-\frac{f_\zeta}{z_\zeta}z_t)(-h)=\operatorname{Re}(f_t-\frac{f_\zeta}{z_\zeta}z_t)(h)$$

を満たす調和接続を得、従って、 下の (3.11) 上の正則函数

$$\text{(3.9)} \qquad (f_t-\frac{f_\zeta}{z_\zeta}z_t)(\zeta)$$

の $\eta=-h$ に於ける境界値が、 Plemelj によって、次の様に与えられる：

$$\text{(3.10)} \qquad (f_t-\frac{f_\zeta}{z_\zeta}z_t)(-h)=-(\frac{1}{2}\left|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}(h)\right|^2+gy(t,\xi,h))-iA_h(\frac{1}{2}\left|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}(h)\right|^2+gy(t,\xi,h)),$$

$$\text{(3.11)} \qquad \Omega_{\pm h}=\{(\xi,\eta):\xi\in R^1,\ 0<|\eta|<h,\ t>0\}.$$

之より、

$$\text{(3.12)} \qquad \operatorname{Re}(f_t-\frac{f_\zeta}{z_\zeta}z_t)(-h)=-(\frac{1}{2}\left|\frac{f_\zeta}{z_\zeta}(h)\right|^2+gy(t,\xi,h))$$

が、$\eta=-h$ に於ける境界条件の方程式の一つを与える。その具体的計算をここには書かないが、結局は $\eta=h$ に於けると同じ方程式を得る。

次に (3.7) によって、同じく鏡像原理によって (3.10) に解析接続された正則函数

(3.13) $$\frac{z_t}{z_\zeta}(\zeta)$$

の $\eta=-h$ に於ける境界値が、同じく Plemelj によって次の様に与えられる：

(3.13) $$\frac{z_t}{z_\zeta}(-h) = -B_h(\mathrm{Im}\frac{f_\zeta(h)}{|z_\zeta|^2}) + i\,\mathrm{Im}\frac{f_\zeta(h)}{|z_\zeta|^2} = -B_h(\frac{\psi_\xi(t,\xi,h)}{|z_\zeta|^2}) + i\frac{\psi_\xi(t,\xi,h)}{|z_\zeta|^2} =$$
$$= -B_h(\frac{A_h\varphi_\xi(t,\xi,h)}{|z_\zeta|^2})) + i\frac{A_h\varphi_\xi(t,\xi,h)}{|z_\zeta|^2},$$

此処に

$$B_h = A_h^{-1}\text{: } inverse\ operator.$$

すなわち、境界 $\eta=-h$ に於ける今ひとつの境界条件方程式が以下の様に得られる：

(3.13) $$\mathrm{Im}\frac{z_t}{z_\zeta}(-h) = \frac{A_h\varphi_\xi(t,\xi,h)}{|z_\zeta|^2}.$$

４．水面波方程式の等角写像（境界方程式の等角像）。

（１）２、３の事実：

Fact 4.1　写像の等角性から：

(4.1) $$\varphi_\eta(0) = \varphi_\eta(t,\xi,0) = 0.$$

実際：

$$\varphi_\eta(t,\xi,\eta) = x_\xi(-\frac{y_\xi}{x_\xi}\Phi_x + \Phi_y) = 0,\ \frac{y_\xi}{x_\xi}(t,\xi,0) = b_x(x)$$

から、(1.2) によって (4.1) が得られる。

これより、$\varphi(t,\xi,\eta)$ は下半平面に鏡像で調和接続されるが、次が成立：

Fact 4.2

(4.2) $$\varphi_\xi(t,\xi - h) = \varphi_\xi(t,\xi,h),$$

(4.3) $$\psi_\xi(t,\xi,-h) = (A_h\varphi_\xi)(t,\xi,-h) = (A_h\varphi_\xi)(t,\xi,h) = \psi_\xi(t,\xi,h).$$

実際：

$$(A_h\varphi_\xi)(-h) = -\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_\xi(\tau)}{\sinh(-\frac{\pi}{2h}(\tau-\xi))}d\tau = -\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_\xi(\tau)}{-\sinh\frac{\pi}{2h}(\tau-\xi)}d\tau =$$
$$= \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_\xi(\tau)}{\sinh\frac{\pi}{2h}(\tau-\xi)}d\tau = (A_h\varphi_\xi)(h).$$

（２）水面波方程式：一様でない水底 *y=b(x), b(x): analytic,* があるとき、水面波方程式の等角写像は、

Proposition 4.1　ポテンシャルと問題の等角写像は次の方程式を満たさなければならない：

(4.6) $$x_t = -x_\xi B_h(\frac{A_h\varphi_\xi}{|z_\zeta|^2}) + \frac{A_h x_\xi A_h\varphi_\xi}{|z_\zeta|^2} + D_h\beta_\xi\frac{A_h\varphi_\xi}{|z_\zeta|^2},$$

(4.7) $$\varphi_t = -gA_h x - gD_h\beta + \frac{1}{2}\frac{(A_h\varphi_\xi)^2 - (\varphi_\xi)^2}{|z_\zeta|^2} - \varphi_\xi B_h(\frac{A_h\varphi_\xi}{|z_\zeta|^2}).$$

（３）存在定理．平らな水底の場合と同様、解析函数解の局所存在が分かる（Kano-Nishida[2], J.Math.Kyoto Univ.,1979, を見よ）：

Theorem 4.2 解析的初期値

(4.8) $$(u(0,\xi),v(0,\xi)=(\varphi_{\xi}(0,\xi,h),x_{\xi}(0,\xi,h))=(u_0(\xi),\mathrm{v}_0(\xi))$$

が

$$\lim_{x\to\pm\infty}(u_0(\xi),\mathrm{v}_0(\xi))=(u_{\pm},v_{\pm}),\ \ v_{+}>0,\ v_{=}>0\ \ and\ \ v_0(\xi)>0\ \ \text{for any}\ \ \xi$$

を満たすとき、

(4.9) $$\left|u-u_{-}\right|_{\sigma,\rho}\le K,\ \ \left|v-v_{-}\right|_{\sigma,\rho}\le K,\ \ \text{for some}\ \ K>0,\ \text{where}\ \ u=\varphi_{\xi},\ v=x_{\xi},$$

である様な (4.6)-(4.7) の一意的な解析函数解が locally in time に存在する。

証明は Kano-Nishida, 1979, と同様であるが、以下の二つの事実に注意しなければならない。

Lemma 4.3 正の数 C が存在して、次の評価が成立：

(4.10) $$\left|D_h\beta_{\xi}\right|_{\sigma,\rho}\le C\left|\beta_{\xi}\right|_{\sigma,\rho}\le C\sup\left|b_x\right|\left|x_{\xi}(\xi)\right|_{\sigma,\rho}\ .$$

証明 次の事実を用いればよい：

$$D_h\beta_{\xi}=\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}\frac{\pi}{2h}(\xi-h)\beta_{\xi}(\xi)d\xi,\ \ \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}(\xi-h)d\xi=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\tau^2}d\tau=\pi.$$

Lemma 4.4 正の数 C が存在して

(4.11) $$|w|_{\sigma,\rho} = \left|\frac{1}{|z_\xi|^2}\right|_{\sigma,\rho} = \left|\frac{1}{(x_\xi(h))^2 + (A_h x_\xi(h) + D_h \beta_\xi)^2}\right|_{\sigma,\rho} \le C < +\infty \ .$$

証明は Kano-Nishida,1979, に於けると全く同様に出来る。ノルムの定義を与えておこう：

(4.12) $$|w|_{\sigma,\rho} = \sup_{|\eta|<\rho} |u(\xi + i\eta)|_\sigma =$$

$$= \sup_{\Omega_\rho} |u| + \sup_{|\eta|<\rho} \ \sup_{d>0} \frac{|u(\xi + d + i\eta) - u(\xi + i\eta)|}{d^\sigma} \ .$$

****

以下、　　２．無次元問題、３．原像回復、４．作用素（＃）の漸近展開、５．Friedrichs 展開、等 。

Bibliographie

[1] L.C.Woods, *The theory of subsonic plane flow*, Cambridge University Press,1961.

[2] T.Kano-T.Nishida, *Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde*, J.Math.Kyoto Univ., 19(1979), 335-370.

****

必要な　２．無次元問題、３．原像回復、４．作用素（＃）の漸近展開、５．Friedrichs 展開、等は、次号以下。

II. Friedrichs expansion (for smooth function solutions):

（１） 井口式で、ソボレフ空間解に対してフリードリックス展開が証明されると思いました。以下の「部分積分の繰返」は、井口の部分積分 (3.1) の繰返しに対応するのだから。先に御配りした，誤植や記号の混乱や変換の混乱でめちゃめちゃになっている「セミナーノート」に従って書きます。

（２）鹿野―西田：Water waves and Friedrichs expansion では、等角イメージに対する Dirichlet-Neumann map の積分核の具体的表示を用いた展開にこだわった事で、井口が D－N マップと呼んで５頁に書いたものに相当する

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\Gamma_x \Phi_x + \Phi_y = \frac{\varphi_\eta}{x_\xi} \quad \text{on} \quad y = \Gamma(t,x) \quad \text{and} \quad \eta = h, \tag{2.3}$$

（此処に

$$\varphi_\eta = \varphi_\eta(t,\xi,\eta)$$

は、ポテンシャル Φ の等角像 φ の、水面 $\eta=h$ に於けるに外法線方向微分）、を利用しませんでした。

しかし今回は、ポテンシャル Φ の y 方向微分，y 軸方向の速度成分の水面に於ける値の計算を、上の (2.3) 式とΦ の x 方向微分，x 軸方向の速度成分 、の水面に於ける値、および連続の方程式の部分積分の繰返しで実行しています。それを，以下の （３）、（４）に書いておきます。下では積分核の展開を利用しているが、それなしで，(3.1) の部分積分の繰返しで行こう，と言うのです。

井口の (2.11) は、我々の（上の論文の） (3.9) と、上にかいた(2.3) に対応するのですね。我々が等角写像の方で計算した事が， 井口 の (2.11) と井口 の所謂 simple domain に於ける，(2.11) の直後の境界値問題を解く事で実現されるわけです。要は、境界上の方程式の (2.11) の形が本質でした。だから，小生が、３次元の時に y 方向の速度成分を繰返し部分積分で計算して Friedrichs 展開を計算したのと同じ事が出来ると思う次第です。問題は評価ですが、この論文でやってあるのだから、 井口 に任せれば出来るのでしょう。

（３）無次元化した方程式で書くと、

(3.1) $$-\delta^2\Gamma_x\Phi_x+\Phi_y=\frac{\varphi_\eta}{x_\xi}\quad\text{on}\quad y=\Gamma(t,x)\quad\text{and}\quad\eta=1,$$

(3.2) $$\Phi_x=\frac{\varphi_\xi}{x_\xi}\quad\text{on}\quad y=\Gamma(t,x)\quad\text{and}\quad\eta=1,$$

および

(3.3) $$\delta^2\varphi_{\xi\xi}+\varphi_{\eta\eta}=0$$

の部分積分繰かえし。

（４）まず　(3.3)　の繰返し部分積分で：

(4.1) $$\begin{aligned}\varphi_\eta(1)&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_{\eta\eta}d\eta=-\frac{\delta^2}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_{\xi\xi}d\eta=\\&=-\delta^2\varphi_{\xi\xi}(1)+\frac{\delta^2}{2}\varphi_{\xi\xi\eta}(1)+\frac{\delta^4}{4}\int_{-1}^{1}\eta^2\varphi_{\xi\xi\xi\xi}d\eta=\\&=-\delta^2\varphi_{\xi\xi}(1)+\frac{\delta^2}{2}\varphi_{\xi\xi\eta}(1)+\frac{\delta^4}{4}\int_{-1}^{1}\eta^2\varphi_{\xi\xi\xi\xi}d\eta=\\&=-\delta^2\varphi_{\xi\xi}(1)+\frac{\delta^4}{3}\varphi_{\xi\xi\xi\xi}(1)+O(\delta^6),etc.\end{aligned}$$

従って、$y=\Gamma$　上で

(4.2) $$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{y}}&=\delta^2\Gamma_x\Phi_x+\frac{\varphi_\eta(1)}{x_\xi(1)}=\\&=\delta^2\Gamma_x\Phi_x-\delta^2\frac{\varphi_{\xi\xi}(1)}{x_\xi(1)}-\frac{\delta^4}{3}\frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}(1)}{x_\xi(1)}+O(\delta^6).\end{aligned}$$

次に、（３．２）の微分から、

(4.3) $\varphi_{\xi\xi}(1) = (\Phi_x x_\xi(1))_\xi = \Phi_{xx} x_\xi(1)^2 + \Phi_x x_{\xi\xi}(1),$

(4.4) $\varphi_{\xi\xi\xi}(1) = \Phi_{xxx} x_\xi(1)^3 + 3\Phi_{xx} x_\xi(1) x_{\xi\xi}(1) + \Phi_x x_{\xi\xi\xi}(1),$

(4.5) $\varphi_{\xi\xi\xi\xi}(1) = \Phi_{xxxx} x_\xi(1)^4 + 6\Phi_{xxx} x_\xi(1)^2 x_{\xi\xi}(1) + 3\Phi_{xx} x_{\xi\xi}(1)^2 + 4\Phi_{xx} x_\xi(1) x_{\xi\xi\xi}(1) + \Phi_x x_{\xi\xi\xi\xi}(1),$

等を得る。其処で、（４．２）を　Φ、Γ および　$b(x)$　で表示する為に　$x(t,\xi,1;\delta)$ の　ξ–微分を計算する。

まず、

$$y = \frac{A_\delta}{\delta} x + D_\delta \beta,\ \beta = y(t,\xi,0) = b(x(t,\xi,0))$$

から、水面　$\Gamma(t,x)$　を次で定義する：

(#) $\Gamma(\mathrm{t,x};\delta) = y(t,\xi_1,1;\delta) = \dfrac{A_\delta}{\delta} x(t,\xi_1,1;\delta) + D_\delta \beta(\xi_1),\ \xi_1 = \mathit{inverse\ function\ of}\ \ x = (t,\xi,1;\delta),$

(##) $$D_\delta \beta(\xi) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}\frac{\pi}{2\delta}(\tau-\xi)\beta(\tau)d\tau.$$

上記（＃＃）の積分作用素はオイラー数を係数とする漸近展開を持つ：

$$\begin{aligned} D_\delta \beta(\xi) &= \frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}\frac{\pi}{2\delta}(\tau-\xi)\beta(\tau)d\tau = \\ &= \beta(\xi) + \frac{1}{2}\delta^2 \beta_{\xi\xi}(\xi) + \frac{5}{48}\delta^4 \beta_{\xi\xi\xi\xi}(\xi) + \ldots. = \\ &= b(x) + \frac{1}{2}\delta^2 (b_{xx} x_\xi(1)^2 + b_x x_{\xi\xi}(1)) + \ldots.\ . \end{aligned}$$

これらから、

$$\begin{aligned} \mathrm{x}_\xi(1) &= \Gamma - \frac{\delta^2}{3} x_{\xi\xi\xi}(1) + \ldots - \{\beta(\xi) + \frac{\delta^2}{2}\beta_{\xi\xi}(\xi) + \ldots\} = \\ &= (\Gamma - b) - \frac{1}{3}\delta^2\{(\Gamma_{xx} + \frac{1}{2}b_{xx})(\Gamma - b)^2 + (\Gamma_x + \frac{1}{2}b_x)(\Gamma - b)(\Gamma_x - b_x) + O(\delta^4), \end{aligned}$$

$$\mathrm{x}_{\xi\xi}(1) = (\Gamma_x - b_x)x_\xi(1) -$$
$$-\frac{1}{3}\delta^2\{(\Gamma_{xxx} + \frac{1}{2}b_{xxx})(\Gamma - b)^2 +$$
$$+ 3(\Gamma_{xx} + \frac{1}{2}b_{xx})(\Gamma - b)(\Gamma_x - b_x) + \frac{1}{2}(\Gamma_x + \frac{1}{2}b_x)((\Gamma - b)^2)_{xx}\}x_\xi(1) + O(\delta^4),$$
$$\mathrm{x}_{\xi\xi\xi}(1) = [(\Gamma_{xx} - b_{xx})x_\xi(1) + (\Gamma_x - b_x)^2]x_\xi(1) + O(\delta^2),$$
$$\mathrm{x}_{\xi\xi\xi\xi}(1) = [(\Gamma_{xxx} - b_{xxx})(\Gamma - b)^2 + (\Gamma_{xx} - b_{xx})((\Gamma - b)^2)_x + ((\Gamma - b)(\Gamma_x - b_x)^2)_x]x_\xi(1) + O(\delta^2).$$

これらの展開を用いて、上記　(4.2),(4.3) および (4.4) を計算すれば、まず以下を得る：

$$\frac{\varphi_{\xi\xi}(1)}{x_\xi(1)} = \Phi_{xx}x_\xi(1) + \Phi_x(\Gamma_x - b_x) +$$
$$-\delta^2\Phi_x[\frac{1}{3}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_{xxx}(\Gamma - b)^2 + \frac{1}{2}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_{xx}((\Gamma - b)^2)_x + \frac{1}{6}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_x((\Gamma - b)^2)_{xx}] +$$
$$+ O(\delta^2) =$$

$$= (\Phi_x(\Gamma - b))_x +$$
$$-\delta^2\Phi_x[\frac{1}{3}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_{xxx}(\Gamma - b)^2 + \frac{1}{2}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_{xx}((\Gamma - b)^2)_x + \frac{1}{6}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_x((\Gamma - b)^2)_{xx}] +$$
$$+ O(\delta^2).$$

之より、(4.2) は：

(4.2)　$$\Phi_{\mathrm{y}} = \delta^2\Gamma_x\Phi_x + \frac{\varphi_\eta(1)}{x_\xi(1)} =$$
$$= \delta^2\Gamma_x\Phi_x - \delta^2\frac{\varphi_{\xi\xi}(1)}{x_\xi(1)} - \frac{\delta^4}{3}\frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}(1)}{x_\xi(1)} + O(\delta^6) =$$

$$= \delta^2 \Gamma_x \Phi_x - \delta^2 (\Phi_x (\Gamma - b))_x -$$

$$- \delta^4 \Phi_x [\frac{1}{3}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_{xxx}(\Gamma - b)^2 + \frac{1}{2}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_{xx}((\Gamma - b)^2)_x + \frac{1}{6}(\Gamma + \frac{1}{2}b)_x((\Gamma - b)^2)_{xx}] -$$

$$- \frac{1}{3}\delta^4 \frac{\varphi_{\xi\xi\xi\xi}(1)}{x_\xi(1)} + O(\delta^6),$$

となり、これより、下の浅水波近似が得られる：

(4.6) $$\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x{}^2 + \Gamma = O(\delta^2),$$

(4.7) $$\Gamma_t + (\Phi_x(\Gamma - b))_x = O(\delta^2).$$

(14.2.2007)

Institut Vercors/ Kyoto, Yokohama, Ube.